کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : ۱

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ (فنی-۶ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۰-۱۳۸۹** نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۸۹/۱۰/۲۹** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

لطفاً تحلیل اول پاسخنامه را در محل مشخص نمایید.

در طول برگزاری امتحان هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- اگر $3x^2+y^2+z^4=1$ مقدار ماکزیمم عبارت $w=x^3yz^2$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال دوگانه $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\sin x\cos(\sin y)\,dy\,dx$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- اگر $D=\{(x,y)\,|\,0\le x,0\le y,x^2+y^2\le\pi\}$ انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

$$\iint_D xy(\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2-y^2))dxdy$$

سوال۴- اگر منحنی C قسمتی از دایره واحد باشد که بالای محور xها قرار دارد و در جهت مثبت مثلثاتی پیموده می‌شود، انتگرال منحنی الخط زیر را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

$$I=\int_C \cos x\cosh y\,dx+\sin x\sinh y\,dy$$

سوال۵- اگر $\vec{F}=(2xy+2x\sin y,x^2\cos y+x^2-x)$ و منحنی Γ مثلثی باشد با راسهای $A=(2,0)$ ، $B=(0,2)$ و $C=(5,3)$ که در جهت مثبت مثلثاتی طی می‌شود، انتگرال $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۶- حجم جسم محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ، استوانه $x^2+y^2=y$ و صفحه $z=0$ را بدست آورید. **۲۰ نمره**

سوال۷- S سطح خارجی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $z\le 1$ و $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر سطح S است. اگر $\vec{F}=(x\cos z,yz,-\sin z)$ مطلوب است مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. **۲۰ نمره**

موفق باشید

سوال۱- برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تابع $\varphi(x,y,z,\lambda)=x^3yz^2-\lambda(3x^2+y^2+z^4-1)$ را تعریف می کنیم.
باید داشته باشیم : $\varphi_x=3x^2yz^2-6\lambda x=0, \varphi_y=x^3z^2-2\lambda y=0, \varphi_z=2x^3yz-4\lambda z^3=0, \varphi_\lambda=3x^2+y^2+z^4-1=0$

اگر $\lambda xyz=0$ آنگاه مقدار عبارت x^3yz^2 برابر صفر است که مقدار ماکزیمم آن نیست چون اگر $x=\frac{1}{3}$ ، $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $z=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

آنگاه شرط مساله برقرار است و $x^3yz^2=\frac{1}{81}$. پس فرض می کنیم $\lambda xyz\neq 0$ و داریم $2\lambda=xyz^2=\frac{x^3z^2}{y}=\frac{x^3y}{z^2}$ و در نتیجه

$x^2=y^2=z^4$ و از معادله چهارم خواهیم داشت $x^2=y^2=z^4=\frac{1}{5}$ و $Max\ w=x^3yz^2=\frac{1}{25\sqrt{5}}$.

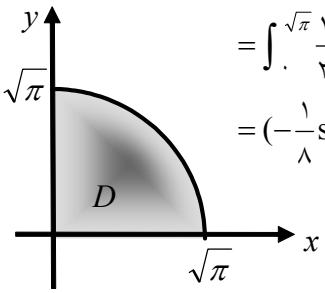
سوال۲ - باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x \sin x\cos(\sin y)\,dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(\sin y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x\,|_y^{\frac{\pi}{2}})\cos(\sin y)\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\cos(\sin y)\,dy=\sin(\sin y)\,|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin 1$$

سوال۳- روش اول (حل مستقیم در دستگاه دکارتی)

$$\iint_D xy(\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2-y^2))dx\,dy=\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi-y^2}}xy(\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2-y^2))dx\,dy$$



$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}y(\sin(x^2+y^2)+\cos(x^2-y^2))\,|_0^{\sqrt{\pi-y^2}}\,dy=\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}y(\cos(\pi-2y^2)-\sin y^2-\cos y^2)\,dy$$

$$=(-\frac{1}{8}\sin(\pi-2y^2)+\frac{1}{4}\cos y^2-\frac{1}{4}\sin y^2)\,|_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

روش دوم (در دستگاه مختصات قطبی) $x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta$ آنگاه داریم

$$D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq\pi\}$$

$$\iint_D xy(\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2-y^2))dx\,dy=\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\cos\theta\sin\theta(\cos r^2-\sin(r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)))\,r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^3[\cos r^2\sin 2\theta-\sin 2\theta\sin(r^2\cos 2\theta)]\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}[-\frac{1}{4}r^3\cos r^2\cos 2\theta-\frac{1}{4r^2}\cos(r^2\cos 2\theta)]\,|_0^{\frac{\pi}{2}}\,dr=\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}r^3\cos r^2\,dr=\frac{1}{4}r^2\sin r^2+\frac{1}{4}\cos r^2\,|_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}$$

روش سوم (تغییر متغیر) قرار می‌دهیم $u=x^2-y^2\ ,\ v=x^2+y^2$ و داریم $dudv=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2x & 2y\end{vmatrix}dxdy=8xydxdy$

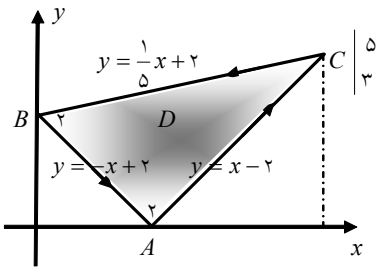
$$\iint_D xy(\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2-y^2))dx\,dy=\iint_D\frac{1}{8}(\cos v-\sin u)du\,dv=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\int_{-v}^{v}(\cos v-\sin u)du\,dv$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(u\cos v+\cos u)\,|_{-v}^{v}\,dv=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}2v\cos v\,dv=\frac{1}{4}(v\sin v+\cos v)\,|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}$$

سوال۴- نقطه $A=(1,0)$ ابتدای مسیر و نقطه $B=(-1,0)$ انتهای مسیر است و چون $(\cos x\cosh y)_y=(\sin x\sinh y)_y$ پس انتگرال مستقل از مسیر است و

$$\int_C\cos x\cosh y\,dx+\sin x\sinh y\,dy=\int_A^B\cos x\cosh y\,dx+\sin x\sinh y\,dy=\sin x\cosh y|_A^B=\sin(-1)-\sin(1)=-2\sin 1$$

سوال ۵ - روش اول (قضیه گرین) منحنی C یک منحنی ساده و بسته است و توابع P و Q روی C و ناحیه محدود به آن یعنی D دارای مشتقات نسبی پیوسته است پس می توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم



$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_C (2xy+2x\sin y)dx+(x^2\cos y+x^2-x)dy=-\iint_D dx\,dy=-6$$

می دانیم انتگرال $\iint_D dx\,dy$ مقدار مساحت ناحیه D را نشان می دهد. ناحیه D یک مثلث قائم الزاویه است که اضلاع زاویه قائمه آن برابر $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ هستند و مساحت آن برابر۶ است. اگر کسی قائم الزاویه بودن مثلث را تشخیص ندهد می‌تواند مساحت آن را به کمک مساحت ذوزنقه بدست آورد یعنی $6=\frac{25}{2}-2-\frac{9}{2}$ که $\frac{25}{2}$ مساحت ذوزنقه، ۲ و $\frac{9}{2}$ مساحت دو مثلث قائم الزاویه ای هستند که از ذوزنقه بریده شده اند تا اینکه ناحیه D باقی بماند. در ضمن با داشتن مختصات سه راس یک مثلث می توان مساحت آن را به کمک فرمول

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$$

حساب کرد. همچنین با معلوم بودن سه راس مثلث، مساحت از فرمول $S_{ABC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ نیز بدست می‌آید که همان دترمینان قبلی است. با معلوم بودن سه راس مثلث، طول اضلاع آن یعنی a,b,c و مقدار p، نصف محیط مثلث، معلوم است و از فرمول هرون $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ هم می توان مساحت مثلث را حساب کرد. اما به جای این کارها می توان انتگرال دوگانه را محاسبه کرد.

$$\iint_D dx\,dy=\int_0^2\int_{-x+2}^{\frac{1}{5}x+2}dy\,dx+\int_2^5\int_{x-2}^{\frac{1}{5}x+2}dy\,dx=\int_0^2\frac{6}{5}x\,dx+\int_2^5(-\frac{4}{5}x+4)\,dx=\frac{3}{5}x^2\Big|_0^2+(-\frac{2}{5}x^2+4x)\Big|_2^5=\frac{12}{5}+\frac{18}{5}=6$$

روش دوم (حل مستقیم انتگرال منحنی الخط روی منحنی داده شده)

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{AC}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{Cb}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\oint_{CB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_5^0(2x(\frac{1}{5}x+2)+2x\sin(\frac{1}{5}x+2))dx+(x^2\cos(\frac{1}{5}x+2)+x^2-x)(\frac{1}{5}dx)$$

$$=\int_5^0(\frac{3}{5}x^2+\frac{19}{5}x+2x\sin(\frac{1}{5}x+2)+\frac{1}{5}x^2\cos(\frac{1}{5}x+2))dx=\frac{1}{5}x^3+\frac{19}{10}x^2+x^2\sin(\frac{1}{5}x+2)\Big|_5^0$$

$$=-25-\frac{95}{2}-25\sin 3=-\frac{145}{2}-25\sin 3$$

$$\oint_{BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^2(2x(-x+2)+2x\sin(-x+2))dx+(x^2\cos(-x+2)+x^2-x)(-dx)$$

$$=\int_0^2(-3x^2+5x+2x\sin(-x+2)-x^2\cos(-x+2))dx=-x^3+\frac{5}{2}x^2+x^2\sin(-x+2)\Big|_0^2=2$$

$$\oint_{AC}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_2^5(2x(x-2)+2x\sin(x-2))dx+(x^2\cos(x-2)+x^2-x)(dx)$$

$$=\int_2^5(3x^2-5x+2x\sin(x-2)+x^2\cos(x-2))dx=x^3-\frac{5}{2}x^2+x^2\sin(x-2)\Big|_2^5$$

$$=125-\frac{125}{2}+25\sin 3-8+10=25\sin 3+\frac{129}{2}$$

و در نهایت داریم :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{AC}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{CB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=2+25\sin 3+\frac{129}{2}-\frac{145}{2}-25\sin 3=+2-\frac{16}{2}=-6$$

سوال ۶ - تصویر جسم مورد نظر بر روی صفحه xy دایره $x^2+y^2=y$ است که معادله آن در مختصات قطبی $r=\sin\theta$ است. معادله مخروط هم در مختصات قطبی به صورت $z=r$ است.

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta}\int_{z=0}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta} r^2\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}(\sin\theta-\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}(-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3})=\frac{4}{9}$$

سوال۷- روش اول (قضیه دیورژانس) چون $\vec{F}$ دارای مشتقات نسبی مرتبه اول پیوسته و $div\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=z$ عبارت ساده‌ای است، پس با افزودن سطح $S'=\{(x,y,1):x^2+y^2\le 1\}$ به مخروط S ، یک سطح ساده و بسته می سازیم که مرز ناحیه R است و طبق قضیه واگرایی (دیورژانس) داریم $\iint\limits_{S\cup S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint\limits_{R}\nabla\cdot\vec{F}\,dV$ تصویر ناحیه R روی صفحه xy ، دایره واحد است و

به کمک مختصات استوانه ای داریم : $\iiint\limits_{R}\nabla\cdot\vec{F}\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_r^{1} r\,z\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\frac{1}{2}(r-r^3)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\,d\theta=\frac{\pi}{4}$

بردار یکه قائم سطح S' برابر $\vec{k}=(0,0,1)$ است و در نتیجه $\iint\limits_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{S'}(-\sin 1)\,dxdy=(-\sin 1)\iint\limits_{S'}dxdy=-\pi\sin 1$

اکنون داریم $\frac{\pi}{4}=\iint\limits_{S\cup S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma+\iint\limits_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma-\pi\sin 1$ و یا $\iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\pi(\frac{1}{4}+\sin 1)$

روش دوم (حل مستقیم) بردار یکه قائم سطح خارجی مخروط در نقطه (x,y,z) برابر است با $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}\,z}(x,y,-z)$ و در نتیجه $d\sigma=\sqrt{2}\,dx\,dy$ اکنون داریم $\iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{S}(\frac{x^2\cos z}{z}+y^2+\sin z)\,dxdy$ اگر انتگرال را در مختصات قطبی بنویسیم داریم

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=r \quad \text{و} \quad \iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{S}(\frac{r^3\cos^2\theta\cos z}{z}+r^3\sin^2\theta+r\sin z)\,dr\,d\theta$$

اکنون داریم :

$$\iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\int_0^{1}\int_0^{2\pi}(r^2\cos^2\theta\cos r+r^3\sin^2\theta+r\sin r)\,d\theta\,dr$$

$$=\pi\int_0^{1}(r^2\cos r+r^3+2r\sin r)\,dr=\pi[r^2\sin r+\frac{1}{4}r^4]_0^{1}=\pi(\frac{1}{4}+\sin 1)$$